



TITLE:

## 10. 線形応答とカオス(基研短期研究会報告「非可積分系の量子力学」,研究会報告)

AUTHOR(S):

斎藤, 信彦

---

CITATION:

斎藤, 信彦. 10. 線形応答とカオス(基研短期研究会報告「非可積分系の量子力学」,研究会報告). 物性研究 1988, 49(5): 473-478

ISSUE DATE:

1988-02-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92937>

RIGHT:

## II 尺八管の形状の微小変化が性能に及ぼす影響

1. 尺八研究の目的 尺八管の管内形状(管軸に沿った内径変化のボタン)と音律・音色との関係を明らかにし、所要の音律でかつ望ましい音色性能の尺八を設計する指針を得る。
2. 音律とは 音律を決定する管の音響量-共鳴周波数
3. 音色を決定する音響量-共鳴周波数特性
4. "所要の音律"、"望ましい音色" 同じ指使いで吹き分ける低(乙)、高(甲)2音間のオクターブ音程、アドミッタンス・スペクトル
5. 管内形状ボタンと乙-甲間オクターブ音程 管の一部の内径を僅か1mm変えると、音律が決定的に変化する。
6. 既存の尺八の音律修正の試み、尺八管の管内形状の楽器としての意味

## 10. 線形応答とカオス

早大・理工 斎藤 信彦

### § 1 序

線形応答理論は統計力学に新しい考えを導入し、また有用な結果を提供して来た。しかしその成立の基礎は必らずしも明確でない。先ず線形応答理論から導かれる正しい関係と、不都合な側面とをあげてみよう。前者には

1. 感受率又は余効関数が、ある量の相関関数によって表わすことが出来る。
2. 揺動散逸定理

があるが、後者には

3. 摂動論が使えないのではないか。
4. エントロピーが増大しない
5. 線形応答理論で求められる感受率は孤立感受率であって、熱力学操作として期待される

断熱感受率でない。

という諸点である。これらをどのように融和させるかが問題である。

一方カオスの研究によって、われわれは次のような事実を認めることにする。

1. 熱力学的状態を支配するものはカオス状態にある力学であって、力学量はつねに不規則に変化する。
2. 観測されるマクロな量は、それに関わる力学量の粗視化されたものである（位相空間の粗視化）。
3. 力学量の時間変化にふくまれる極度の高周波数部分は観測することができない（時間の粗視化）

この立場から線形応答を考えてみよう。

## § 2 粗 視 化

これからは古典力学の記述で行う。Liouville の方程式はハミルトニアン  $H$  を無摂動項  $H_0$  と摂動項  $H_1$  にわけて

$$\frac{df}{dt} = (H, f) = (H_0, f) + (H_1, f) \quad (1)$$

とかく  $(\ , \ )$  は Poisson 括弧式であって自己共役演算子  $L_0$  をつかうと

$$(H_0, f) \equiv i L_0 f \quad (2)$$

とかける。(1)の形式解は

$$f = f_0 + \int_0^t e^{i(t-t_0)L_0} (H_1, f)_{t=t'} dt' \quad (3)$$

である。但し  $t = 0$  で  $f = f_0$ ,  $\frac{df_0}{dt} = (H_0, f_0) = 0$ ,  $\int f d\Gamma = 1$  とする。 $H_1 = -AF(t)$  とおき、任意の力学量を  $B$  とすると、 $B$  の平均は

$$\langle B \rangle = \int B f d\Gamma = \langle B \rangle_0 - \int d\Gamma \int_0^t (A, f(t')) B(t-t') F(t') dt' \quad (4)$$

$$B(t-t') = e^{-i(t-t_0)L_0} B \quad (5)$$

カオスの力学によると、 $f$  および  $B(t-t')$  は空間的にも、時間的にも不規則に変化する。そこで次に粗視化を考える。粗視化された関数とは一般に次のように定義する。 $G$  を任意の位相空間内の滑らかな関数とする。このとき、

$$\int G f d\Gamma = \int G \bar{f} d\Gamma \quad (6)$$

となるような滑らかな関数  $\bar{f}$  があるとき、 $f$  は  $\bar{f}$  に法則収束 (Convergence in law) とい  
い、我々はこの  $\bar{f}$  を  $f$  の (空間的に) 粗視化された関数ということにする。すると

$$\langle B \rangle = \langle B \rangle_0 - \int d\Gamma \int_0^t (A, \bar{f}(t')) \bar{B}(t-t') F(t') dt' \quad (7)^*$$

この式の  $\bar{B}(t-t')$  も不規則な関数である。それ故更に時間に関する法則収束をとって  $\bar{\bar{B}}(t-t')$  とし、

$$\langle B \rangle = \langle B \rangle_0 - \int d\Gamma \int_0^t (A, \bar{f}(t')) \bar{\bar{B}}(t-t') F(t') dt' \quad (8)$$

とすることが出来るだろう。 $\bar{\bar{B}}(t-t')$  は(5)と違って

$$\bar{\bar{B}}(t-t') = e^{-i(t-t')\mathcal{L}_0} B \quad (9)$$

とすることが出来る。 $\mathcal{L}_0$  は  $L_0$  の粗視化された演算子であって一般には自己共役ではない。

(1)の代りに

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = i\mathcal{L}_0 \bar{f} + (H_1, \bar{f}) = i(\mathcal{L}_0 + L_1) \bar{f} \quad (10)$$

の式が成り立つことになる。 $L_1$  は  $H_1$  から出る(2)と同様な演算子である。これはふつうの Fokker-Planck の式の形をとるであろう。

(8), (10)式の  $\bar{f}$  は  $AF$  について展開可能である。線形領域に限れば  $\bar{f}$  を  $f_0$  とおいてよいから、余効関数は時間の相関関数として表わすことが出来る。

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{BA}(t) &= -\int d\Gamma (A, f_0) \bar{\bar{B}}(t) = \int d\Gamma (A, \bar{\bar{B}}(t)) f_0 d\Gamma \\ &= \langle (A, \bar{\bar{B}}(t)) \rangle_0 = \langle \Delta A, \Delta \bar{\bar{B}}(t) \rangle_0 \end{aligned} \quad (11)$$

但し

$$\Delta A = A - \langle A \rangle_0 \quad \Delta \bar{\bar{B}}(t) = \bar{\bar{B}}(t) - \langle B \rangle_0$$

としてある。線形応答理論では余効関数  $\phi_{BA}(t)$  は

---

\*) 一般に  $f = \bar{f} + f'$ ,  $B = \bar{B} + B'$  とかくと,  $fB = \bar{f}\bar{B} + \overline{f'B'}$  であるが,  $f$  と  $B$  が違う関数であれば, ゆらぎも独立におこり,  $\overline{f'B'} = 0$  とおいてよいだろう。

$$\phi_{BA}(t) = \langle \Delta A, \Delta B(t) \rangle_0 \quad (12)$$

である。 $\bar{\phi}_{BA}(t)$ と $\phi_{BA}(t)$ とは(12)に法則収束の考えをつかえば同じである。揺動散逸定理は

$$\chi_{BA}(\omega) = \int_0^\infty \phi_{BA}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty \langle \Delta A, \Delta B(t) \rangle_0 e^{-i\omega t} dt \quad (13)$$

からえられるが、これは法則収束をつかって

$$\chi_{BA}(\omega) = \int_0^\infty \langle \Delta A, \bar{\Delta B}(t) \rangle_0 e^{-i\omega t} dt \quad (14)$$

に等しい。しかしながら(11)と(12)、(13)と(14)の右辺は夫々内容がちがう。実際に(12)又は(13)を計算しようとするときは、物理的な考察によるので、法則収束した(粗視化した)量を使わないわけにはいかないから正しい結果がえられるのである。粗視化は空間的及び時間的に高い周波数のものを落す作用である。 $\omega$ が観測できる周波数であるなら、(13)の右辺は(14)に等しく揺動散逸定理がそのままの形で成立するのである。

### § 3 エントロピーと感受率

エントロピーは $f$ でなく $\bar{f}$ を用いて記述しなければならない。 $\bar{f}$ は(10)の形のFokker-Planckの式に従うから、当然エントロピーは増大する。

次に感受率を考える。静的な場合として $F(t) = \Delta F$ (一定)とする。また $B = A$ とにおいて(8)、(11)から十分時間がたった後では感受率 $\chi$ は

$$\chi = \frac{\langle \Delta A \rangle}{\Delta F} = \int_0^\infty \langle \Delta A, \bar{\Delta A}(t) \rangle_0 dt \quad (15)$$

である。 $\Delta A$ はFokker-Planck型の式に従うとするのでマクロな熱力学で書かれるとしてよい。このときは温度は $\Delta T$ だけ上っているはずである。等温的な条件では(15)の右辺は等温感受率 $\chi_T$ であるから、今の場合は

$$\chi = \chi_T + \frac{\partial \chi_T}{\partial T} \Delta T \quad (16)$$

$\chi_T$ は等温感受率( $\langle \Delta A \rangle / \Delta F$ ) $_T$ であり、 $\Delta T$ は断熱条件

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{C_F} \left( \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial T} \right)_F \Delta F \quad (17)$$

に従うから(16)式の右辺は断熱感受率にひとしいことは熱力学の関係式からわかる。

## § 4 計算機実験

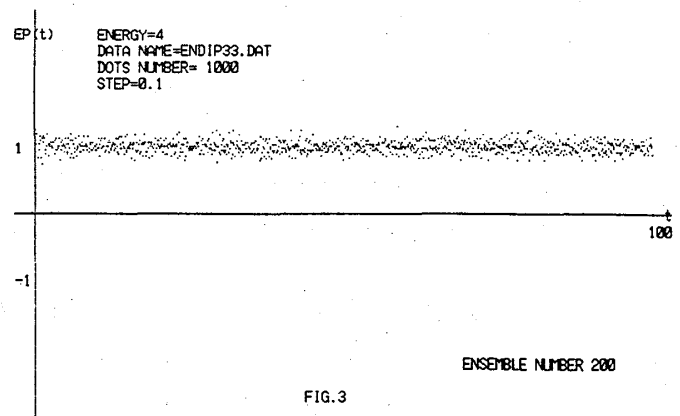
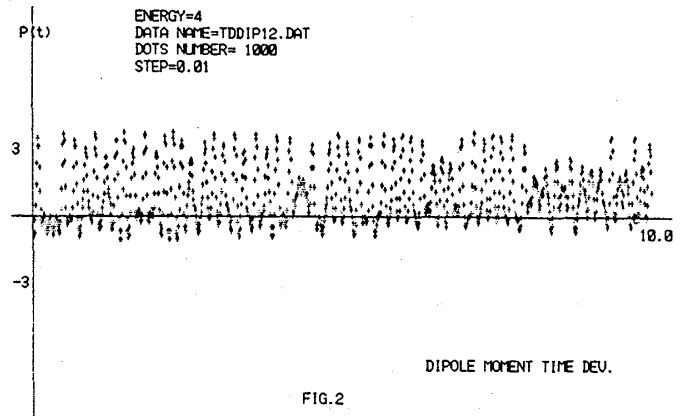
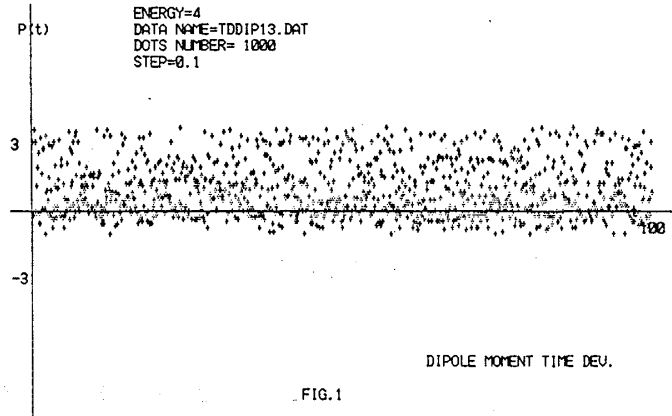
(7)および(8)において  $\bar{B}(t)$  は時間と共に不規則に変化する関数であって、その粗視化をしなければならぬと述べた。このことを簡単な数値実験で示しておこう。

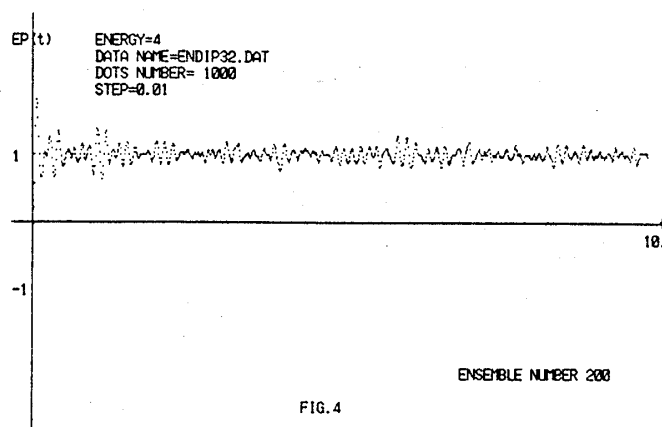
二つならんだ剛体双極子が電場を受けているときの二次元運動を考える。

ハミルトニアンは、一定の電場  $E$  がかかっているとして

$$H = \frac{1}{2I}(p_{\theta_1}^2 + p_{\theta_2}^2) + c(\sin\theta_1 \sin\theta_2 - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2) - \mu E(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

この式を適当な初期条件の下において  $(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$  の時間変化を観測する。その一例は図 1, 2 である。 $I = 10^{-2}$ ,  $E = 5$ ,  $\mu = 2$ ,  $c = 1$  としてある。図 1 は 0.1 の間隔でプロットし  $t = 100$  までとったもので図 2 は 0.01 の間隔で  $t = 10$  までとったものである。図 3, 4 は図 1, 2 を角運動量に関してはガウス分布,  $\theta_1, \theta_2$  に関しては一様な分布として 200 コの初期値により平均をとったものである。ここでも時間に対し不規則に変化している。初期条件の粗視化だけでは足りないことがわかる。





## 11. QUANTUM CHAOS

Giulio Casati  
University of Milan - Italy

Much theoretical and experimental work has been recently devoted to the investigation of the behaviour of highly excited atoms in microwave fields. Indeed this problem provides an ideal testing ground for the existence of quantum "chaotic" phenomena, and brings the long debated and sometimes abstract question about the existence and nature of Quantum Chaos very close to physical application. In particular, the deep phenomenon of quantum suppression of chaotic diffusion, that previous theoretical studies on quantum chaos indicate as a typical occurrence, may find here its first experimental verification. This phenomenon is due to quantum interference effects that prevent any diffusive like excitation process from going on indefinitely, and can be considered as a dynamical version of the Anderson localization well-known to solid state physicists.

Here we present theoretical and numerical results showing that the final state distribution of highly excited hydrogen atoms produced by a monochromatic field is exponentially localized in the number of absorbed photons. These results allow for a theoretical interpretation of underthreshold ionization and of the characteristic peak structure